الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة اين خلدون -تيارت -

كلية العلوم الاقتصادية، التجارية والعلوم التسيير

قسم العلوم الاقتصادية

الدالة الأسية ذات الأساس e

موجهة لطلبة

السنة الأولى جذع مشترك علوم الاقتصادية، تجارية وعلوم التسيير

من اعداد الدكتور:

مختار مختاري

السنة الجامعية

2023 - 2022

1 الدالة الأسية ذات الأساس e

1.1 عموميات:

تعريف و مبرهنة:

تعريف:

توجد دالة وحيدة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ تساوي مشتقاتها و تأخذ القيمة 1 عند 0.

هذه الدالة نرمز لها بالرمز exp و تسمى الدالة الأسية ذات الأساس e .

لدينا: $\exp' = \exp$ و $\exp(0) = 1$.

1.2 الترميز:

اصطلاحا، من أجل كل عدد حقيقي x، نرمز بالرمز e^x بدل $\exp(x)$.

ملاحظة:

من أجل كل عدد حقيقي x، $e^x > 0$.

1.3 خواص جبرية:

خواص:

من أجل كل عدد حقيقي x، و كل عدد حقيقي y، و كل عدد صحيح نسبي n لدينا:

- ✓ $e^{x+y} = e^x e^y$.
- ✓ $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.
- ✓ $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$.
- ✓ $(e^x)^n = e^{nx}$.
- ✓ $e^0 = 1$.

نتيجة:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = e^x$ ، f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x) = e^x$.

1.4 دراسة الدالة الأسية:

إشارة و إتجاه تغير الدالة الأسية:

✓ $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$.

✓ الدالة الأسية $x \mapsto e^x$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

من أجل كل عدد حقيقي x، من أجل كل عددان حقيقيان a و b:

- $a < 0 \Leftrightarrow 0 < e^a < 1$.
- $a = 0 \Leftrightarrow e^a = 1$.
- $a > 0 \Leftrightarrow e^a > 1$.
- $a < b \Leftrightarrow e^a < e^b$.
- $a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$.

تطبيق 1:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية:

$$e^{2x}+3=0\ (1)\quad e^{-2x+1}-1=0\ (2)\quad e^{-2x-1}-e^x<0\ (3)\quad e^{2x}>2-e^x\ (4)$$

طريقة:

المعادلة $e^{u(x)}=e^{v(x)} \Leftrightarrow u(x)=v(x)$.

المتراجحة $e^{u(x)} \geq e^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) \geq v(x)$.

الحل:

(1) تعني $e^{2x}=-3$. هذه المعادلة لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$ لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $e^{2x}>0$

إذن $S=\phi$.

(2) تعني $e^{-2x+1}=1$ أي $e^{-2x+1}=e^0$ أي $-2x+1=0$ و منه $x=0,5$ إذن $S=\{0,5\}$.

(3) تعني $e^{-2x-1}<e^x$ أي $-2x-1<x$ أي $x>-\frac{1}{3}$ و منه $S=\left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$.

(4) تعني $e^{2x}+e^x-2\leq 0$. بوضع $e^x=X$ نحصل على $X^2+X-2\leq 0$

جذرا كثير الحدود X^2+X-2 هما -2 و 1 و منه $X^2+X-2\leq 0$ تعني $X<-2$ أو $X>1$

$X<-2$ تعني $e^x<-2$. هذه المتراجحة لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$.

$X>1$ تعني $e^x>1$ أي $x>0$. إذن مجموعة حلول المتراجحة (4) هي $S=]0;+\infty[$.

تطبيق 2:

حل في $\mathbb{R}$ ما يلي :

1. $e^{x^2+3x-3}=e^{2x-1}$.

2. $e^{5x+3}>e^{3x-1}$.

3. $e^{2x-1}=3$.

4. $e^{x+2}\geq -5$.

5. $e^{x+2}\geq 3$.

لنهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} e^x=0 \text{ ، } \lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty \text{ ،}$$

$$\lim_{x\to x_0} u(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} e^{u(x)}=+\infty \text{ ،}$$

$$\lim_{x\to x_0} u(x)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} e^{u(x)}=-\infty \text{ ،}$$

مثال:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $f(x)=e^{-x+2}$.

✓ لدينا $\lim_{x\to-\infty}(-x+2)=+\infty$ و بما أن $\lim_{X\to+\infty} e^X=+\infty$ فإن $\lim_{x\to-\infty} e^{-x+2}=+\infty$

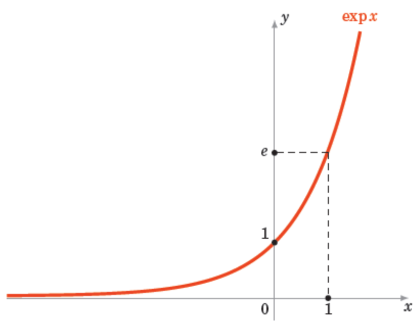
أي $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

✓ لدينا $\lim_{x\to+\infty}(-x+2)=-\infty$ و بما أن $\lim_{X\to-\infty} e^X=0$ فإن $\lim_{x\to+\infty} e^{-x+2}=0$

أي $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

جدول التغيرات و رسم المنحنى:

x	$+\infty$ $-\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$



1.5 التزايد المقارن:

من أجل كل عدد طبيعي n،

✓ $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$.

✓ $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$.

✓ $\lim_{x\to-\infty} x\,e^x=0$.

✓ $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x=0$.

✓ $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

✓ $\lim_{x\to x_0} u(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{e^{u(x)}}{[u(x)]^n}=+\infty$.

✓ $\lim_{x\to x_0} u(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}[u(x)]^n e^{u(x)}=0$.

ملاحظة:

من أجل x قريب من 0 : $e^{x} \cong x+1$.

ملاحظة : (اتجاه التغيرات)

خاصية:

إذا كانت u دالة معرفة على مجال I فإن للدالتين u و $\exp\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I.

مثال:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $f(x)=e^{x^{2}-1}$.

نلاحظ أن $f=\exp\circ u$ حيث u هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $u(x)=x^{2}-1$.

بما ان الدالة u متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ ، فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$.

بما ان الدالة u متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ فإن الدالة f متزليدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

1.6 مشتقة الدالة $x \mapsto \exp o u$:

مبرهنة:

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على المجال I.

الدالة I المعرفة بـ : $f(x)=e^{u(x)}=(\exp o u)(x)$ تقبل الاشتقاق على I وَ من أجل كل عدد x من I ، $f(x)=u'(x).e^{u(x)}$.

البرهان:

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على I و علما ان الدالة " exp " قابلة للاشتقاق على $]-\infty;+\infty[$ فإن الدالة المركبة $\exp\circ u$ قابلة للاشتقاق على I و بتطبيق قاعدة حساب مشتقة دالة مركبة يكون لدينا:

من أجل كل x من I، $(\exp\circ u)'(x)=u'(x)\times(\exp)'[u(x)]=u'(x)\times(\exp)[u(x)]$

أي من أجل كل x من I، $(\exp\circ u)'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.

مثال:

- ✓ مشتقة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $f(x)=e^{x^2+x+1}$ هي $f'(x)=(2x+1)e^{x^2+x+1}$.
- ✓ الدالة F حيث $F(x)=e^{-x^2}$ هي دالة أصلية للدالة f حيث $f(x)=-2xe^{-x^2}$ على $\mathbb{R}$.

مثال:

- ✓ الدالة $\varphi: x \mapsto e^{x^2-3x}$ معرفة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ عندئذ دالتها المشتقة هي الدالة

$$\varphi: x \mapsto (3x^1-3)e^{x^2-3x}$$

- ✓ عين الثوابت الحقيقية $\alpha;\beta$ حتى تكون الدالة $G: x \mapsto (\alpha x^2+4x+\beta)e^{x^3+2x^2-9x+3}$ أصلية للدالة

$$g: x \mapsto 5e^{x^3+2x^2-9x+3}$$

1.7 تمرينات محلولة:

تمرين 1:

حل في $\mathbb{R}$ مايلي:

$$(1)\quad e^{x^2-1}=e\,;(2)\quad e^{2x}-3e^x+2=0\,;(3)\quad (x^2-4x+3)e^x=0$$

$(4)\ \ xe^x-x^2e^x>0$ ، $(5)\ \ e^{x^2-1}>e$.

الحل:

1- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $(x^2-4x+3)e^x=0$:

$$(x^2-4x+3)e^x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+3=0 & .....(1) \\ e^x=0 & .....(2) \end{cases}$$

نحل المعادلة (1). $\Delta=4$ و $x_1=3$ أو $x_2=1$.

و منه مجموعة الحلول المعادلة (1) هي $S=\{1,3\}$.

نحل المعادلة (2). المعادلة لاتقبل حلول في $\mathbb{R}$ لان $\forall x\in\mathbb{R}; e^x>0$.

و بالتالي حلول المعادلة المعطاة هي

$$S=\{1,3\}$$

2- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $e^{2x}-3e^x+2=0$:

$$e^{2x}-3e^x+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=e^x \\ y>0 \\ y^2-3y+2=0 \;....(1) \end{cases}$$

نحل المعادلة (1): نلاحظ أن $1-3+2=0$ و بالتالي $y_1=1$ و منه $y_2=2$ حلول مقبولة.

لما $y=1 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$ و $y=2 \Leftrightarrow e^x=2 \Leftrightarrow x=\ln 2$

و بالتالي مجموعة الحلول المعادلة هي $S=\{0,\ln 2\}$.

3- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $e^{x^2-1}=e$:

$$e^{x^2-1}=e \Leftrightarrow x^2-1=0$$
$$\Leftrightarrow (x=-1) \text{ أو } (x=1)$$

و بالتالي مجموعة الحلول المعادلة هي $S=\{-1,1\}$.

4- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $xe^x - x^2e^x > 0$:

$$xe^x - x^2e^x > 0 \Leftrightarrow xe^x(1-x) > 0$$

لدينا: $\forall x \in \mathbb{R}; e^x > 0$، $\begin{cases} \forall x \in]0,+\infty[;\ x > 0 \\ \forall x \in]-\infty,0[;\ x < 0 \end{cases}$ و $\begin{cases} \forall x \in]1,+\infty[;\ 1-x > 0 \\ \forall x \in]-\infty,1[;\ 1-x < 0 \end{cases}$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
e^x	+	+ | +	+ | +	+
x	-	- 0 +	+ | +	+
$1-x$	+	+ | +	+ 0 -	-
$xe^x(1-x) > 0$	-	- 0 +	+ 0 -	-

و بالتالي : $S =]0,1[$

5- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $e^{x^2-1} > e$:

$$\begin{aligned} e^{x^2-1} \geq e &\Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) \geq 0 \end{aligned}$$

و بالتالي : $S =]-\infty;\sqrt{2}\,] \cup [\sqrt{2};+\infty[$

تمرين2:

نعتبر الدالة $f : x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$ المعرفة على المجموعة $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$.

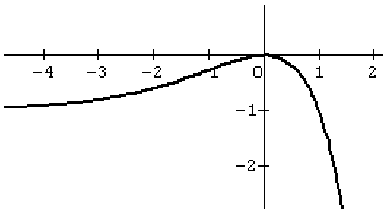
- احسب الدالة المشتقة للدالة f.
- استنتج إشارتها ثم حدد اتجاه تغيراتها.
- أنشئ التمثيل البياني لها في معلم متعامد ومتجانس.

الحل :

من أجل كل عدد حقيقي x ينتمي إلى $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ فإن $f'(x) = \dfrac{(1-x)e^x - 1}{(e^x-1)^2} \leq 0$

لأن مشتقة الدالة $x \mapsto (1-x)e^x - 1$ هي $g'(x) = -xe^x$

يعني $g(x) = (1-x)e^x - 1$



ومنه $(1-x)e^x - 1 \le 0$

من هنا الدالة $f : x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$ متناقصة تماما

تمرين 4:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$ و ليكن (C) منحنيها البياني.

1. عين نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها. استنتج المستقيمات المقاربة للمنحني (C).
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها. أرسم المنحني (C) معلم متعامد و متجانس.

الحل:

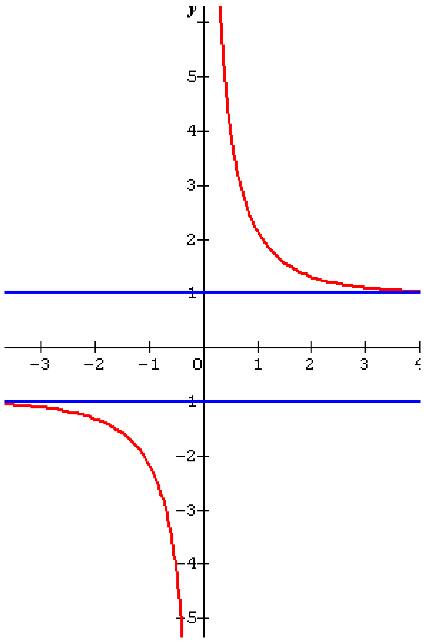
- لدينا $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ و منه $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1} = -1$ إذن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.
- نعلم أن $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ و منه لدينا حالة عدم التعيين.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x(1 + e^{-x})}{e^x(1 - e^{-x})} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$ و بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

- لدينا $\lim\limits_{x \to 0} (e^x + 1) = 2$ و $\lim\limits_{x \to 0} (e^x - 1) = 0$.

نعلم أن $e^x < 1$ يعني $x < 0$ و $e^x > 1$ يعني $x > 0$

و بالتالي $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = +\infty$.



يقبل المنحني (C) ثلاث مستقيمات مقاربة معادلاتها:

$x=0$، $y=-1$ و $y=1$.

2) f قابلة للاشتقاق على المجالين $]-\infty;0[$، $]0;+\infty[$

و لدينا $f'(x)=\frac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$ و بالتالي فالدالة f

متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;0[$، $]0;+\infty[$.

1.8 تمارين للحل:

تمرين 1: (الهدف إثبات أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$)

أ- نعتبر الدالة g المعرفة على $]-\infty;+\infty[$ بـ:

$g(x) = (x-1)e^x$، الشكل المقابل هو

(C_g) التمثيل البياني لهافي معلم متعامد و متجانس

1. احسب $g'(x)$

2. استنتج جدول تغيرات الدالة f على $]-\infty;+\infty[$ (حساب النهايات غير مطلوب)

3. برر إذن أنه من أجل كل x من $]1;+\infty[$: $xe^x \geq e^x$ ماذا تستنتج بشأن النهايات؟

ب- 1. بين انه من أجل كل عدد حقيقي $x \in]-\infty;1[$: $xe^x \leq e^x$

2. استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x$

تمرين 2:

1. نعتبر الدالة g المعرفة على $]-\infty;1[$ كما يلي: $g(x) = (1-x)e^x - 1$

أ- ادرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها (لا يطلب حساب النهايات).

ب-استنتج إشارة $g(x)$ و بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x \leq \dfrac{1}{1-x}$

2. نعتبر الدالة g المعرفة على $]-\infty;1[$ كما يلي: $f(x) = e^x + \ln(1-x)$

أ- اشرح لماذا الدالة f معرفة على $]-\infty;1[$؟

ب- ادرس نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند 1 .

ج- ادرس تغيرات الدالة f. (يمكن استعمال نتائج السؤال1) ارسم بدقة المنحني $(\mathcal{C})$ الممثل للدالة f.

تمرين 3:

أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x},\ \lim_{x\to+\infty}\frac{-e^{x}}{-x+e^{-x}};\ \lim_{x\to-\infty}(x-1)\frac{e^{x}}{x}$$

تمرين 4:

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي: $f(x)=e^{2x}-3e^{x}+x+2$ و (C) تمثيلها البياني في المعلم السابق (الوحدة $4cm$).

1. أ) عين نهاية الدالة f عندما يؤول x إلى $-\infty$.

ب) بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x+2$ مقارب للمنحنى (C).

جـ) ادرس وضع المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم (D).

بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f(x)=e^{x}\left(e^{x}-3+\frac{x}{e^{x}}+\frac{2}{e^{x}}\right)$ ثم استنتج نهاية الدالة f عندما يؤول x إلى $+\infty$.

2. أ) احسب $f'(x)$ ثم تحقق أن : $f'(x)=(2e^{x}-1)(e^{x}-1)$.

ب) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f'(x)=0$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3. أ) عين معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة التي فاصلتها $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$. ماذا يمكن أن نقول عن المستقيمين (T) و (D)؟

ب) أنشئ (T) و (D) و (C) في نفس المعلم.

تمرين 5:

الجزء الأول:

f دالة عددية معرفة عل $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(2-5x)e^{-x}+2$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $2cm$).

1) احسب نهايات الدالة f عندما $x\to-\infty$ و عندما $x\to+\infty$.

2) لتكن f' الدالة المشتقة للدالة f.

أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x)=(5x-7)e^{-x}$.

ب) ادرس أشارة $f'(x)$ ثم أنشئ جدول تغيرات الدالة f .

3) مثل الجزء من المنحني (C) الذي فواصل نقطه بين 0 و 6.

4) أ) بين أن المعادلة $f(x)=1,5$ تقبل، في المجال $[0;6]$، حلين α و β حيث α هو الحل الأصغر.

ب)أعط قيمة مقربة لكل من الحلين α و β (تدوّر النتائج إلى 10^{-2}).

ج) حل في المجال $[0;6]$ المتراجحة $f(x)\leq 1,5$.

الجزء الثاني:

نضع $C_M = f$ حيث C_M هي الكلفة الهامشية لإنتاج سلعة X مقدرة بالطن T، و X محصور بين 0 و 6.

1. أ) ما هي قيمة السلعة التي من أجلها تكون الكلفة الهامشية أصغرية؟

ب) ما هي قيم السلعة التي من أجلها تكون الكلفة الهامشية أقل من أو تساوي $1,5$؟ (تدور النتائج إلى 10^{-2}).

2. الكلفة الكلية C_T هي دالة أصلية لدالة الكلفة الهامشية.

تحقق أن: $C_T(x)=(5x+3)e^{-x}+2x+k$ ثم عين k إذا علمت أن $C_T(0)=2$.

الفهرس